Jagiellońskie Warsztaty Olimpijskie 2025/2026

Spotkanie 4 (17 stycznia 2026)

Dominik Bysiewicz, Kacper Piotrowski, Anatoli Shatsila

NIERÓWNOŚCI

Zadanie 1. Udowodnij, że dla dodatnich a, b, c zachodzi:

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geqslant 9a^2b^2c^2.$$

Zadanie 2. Znajdź wszystkie rozwiązania równania:

$$(1 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 + x_n^2 = \frac{1}{n+1}.$$

Zadanie 3. Dla $m > 0$ znajdź, w zależności od ustalonego $k \in \mathbb{Z}_+$, najmniejszą możliwą wartość wyrażenia:

$$m^k + \frac{k}{m}.$$

Zadanie 4. Udowodnij, że w dowolnym trójkącie zachodzi:

$$\sin \sphericalangle BAC + \sin \sphericalangle ABC + \sin \sphericalangle BCA \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Zadanie 5. Niech a, b, c, d dodatnie oraz $c^2 + d^2 = (a^2 + b^2)^3$. Pokaż, że:

$$\frac{a^3}{c} + \frac{b^3}{d} \geqslant 1.$$

Zadanie 6. Udowodnij następującą nierówność dla wszystkich dodatnich x, y, z

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{z^2 + x^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2} \geqslant \frac{x + y + z}{2}.$$

Zadanie 7. Niech a, b, c będą liczbami dodatnimi. Udowodnij, że

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqslant \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

Zadanie 8. Dla każdego $n \geqslant 2$ udowodnij nierówność

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{2^{n-2}}{n!} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Zadanie 9. Liczby a, b, c są długościami boków trójkąta. Udowodnij nierówność

$$\frac{a}{b + c - a} + \frac{b}{c + a - b} + \frac{c}{a + b - c} \geqslant \frac{a + b}{2c} + \frac{b + c}{2a} + \frac{c + a}{2b}.$$

Zadanie 10. Niech $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ dodatnie liczby rzeczywiste. Udowodnij, że:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} + \sqrt[n]{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n} \leqslant \sqrt[n]{(a_1 + b_1) \cdot \ldots \cdot (a_n + b_n)}.$$

Zadanie 11. Dla nieujemnych a, b, c takich, że $abc = 1$ udowodnij, że:

$$\frac{1}{a^3(b + c)} + \frac{1}{b^3(a + c)} + \frac{1}{c^3(a + b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Zadanie 12. Niech a, b, c będą liczbami dodatnimi o własności $abc = 1$. Udowodnij, że

$$\frac{ab}{1+c} + \frac{bc}{1+a} + \frac{ca}{1+b} \geqslant \frac{27}{(a+b+c)(3+a+b+c)}.$$

Zadanie 13. Udowodnij, że jeśli $a + b + c = 3$ dla dodatnich a, b, c, to:

$$a^b b^c c^a \leqslant 1.$$

Zadanie 14. Liczby dodatnie rzeczywiste a, b, c spełniają równość $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Udowodnij, że

$$\frac{\sqrt{a + \frac{b}{c}} + \sqrt{b + \frac{c}{a}} + \sqrt{c + \frac{a}{b}}}{3} \leqslant \frac{a+b+c-1}{\sqrt{2}}.$$